# Reptes

## Problemes

Juanjo Rué
Universitat Politècnica de Catalunya

Un nou número de l'*SCM/Notícies* i un nou recull de problemes després de l'estiu més estrany de les nostres vides (almenys per a alguns de nosaltres).

Per una banda, proposem quatre nous problemes. Tres d'ells, de col·laboradors habituals d'aquesta secció: dos problemes de geometria proposats per en Miquel Amengual, des de Cala Figuera, Mallorca, i per Joaquim Nadal, des de Llagostera i un de desigualtats proposat per en Jose-Luis Díaz Barrero. N'hem proposat un quart, des de la redacció, de combinatòria. Agraïm a tots ells la seva ajuda i esperem que siguin de l'interès dels nostres lectors!

Aquesta vegada hem rebut menys solucions de les habituals... Aquest estiu de ben segur ha estat anòmal per a tothom. Malgrat això, us animem a enviar les vostres solucions de cara als propers números. Anem, doncs, ara, a les solucions. Hem rebut una solució del problema A161 i del A163 per part d'en Joaquim Nadal, una solució del problema A163 per part d'en Bruno Salgeiro i finalment la solució que publiquem del problema A164 per part d'en Miquel Amengual. No hem rebut cap solució del problema A162... Sembla que l'aritmètica se'ls ha creuat als nostres lectors! En tot cas, hem optat per publicar la majoria de les solucions enviades pels proponents, perquè eren sintètiques i curtes.

Us demanem que ens feu arribar les vostres solucions en TEX o LaTEX, i així mateix cal adjuntar (si escau per al problema en consideració) les figures geomètriques corresponents en un format editable. Els punts anteriors ens facilitaran molt la feina en la tasca d'edició de les possibles solucions. Gràcies!

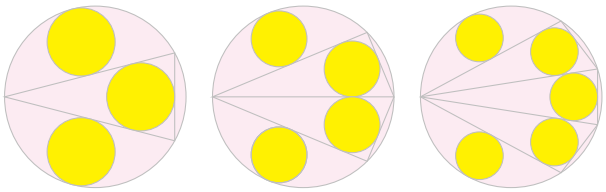
Finalment, el recordatori de sempre: les solucions i propostes de problemes cal enviar-les a

`juan.jose.rue@upc.edu`.

### Problemes proposats

**A165.** (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

A cada una de les figures següents, on $R$ designarà el radi de la circumferència gran i $r$ el radi de cada una de les circumferències petites, determinau el valor de $r$ en funció de $R$.



Nota: A cada esquema, la circumferència gran circumscriu els triangles que hi figuren, cada un dels quals amb la seva circumferència inscrita. Les restants circumferències petites són inscrites en sengles segments circulars i tangents en els punts mitjans de les respectives cordes.

**A166.** (Proposat per la redacció.)

Sigui $n \geq 2$ un nombre enter. Per un subconjunt $S$ no buit de $[n] = \{1, \ldots, n\}$ , denotem per $\mathbb{E}[|S|] = \frac{1}{|S|}\sum_{s\in S} s$ (i.e., el valor mitjà dels elements de $S$). Sigui $T_n$ el nombre de subconjunts no buits de $[n]$ pels quals $\mathbb{E}[|S|]$ és un nombre enter. Demostreu que $T_n - n$ és parell.

**A167.** (Proposat per José-Luis Díaz Barrero, UPC, Barcelona.)

Siguin $a, b, c$ tres nombres reals positius tals que $abc = a + b + c + 2$. Demostreu que

$$\frac{2}{9} + \sqrt[3]{\frac{a+b+c+2}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \leq \frac{1}{9}(abc).$$

Per quins valors de $a, b, c$ es dona amb igualtat?

**A168.** (Proposat per Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.)

En el triangle $\triangle ABC$, sigui $L$ el peu de la bisectriu interior de $C$. Sigui $AL = m$ , $LB = n$, $CL = l$. Denotem per $a$ $(b, c)$ la longitud del costats del triangle oposat al vèrtex $A$ $(B, C$ respectivament). Demostreu que

$$l = \sqrt{ab - mn}.$$

## Solucions

**A161.** (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Sigui un punt $P$ del costat $AB$ d'un triangle $\triangle ABC$. Traceu per $P$ una recta que talli el costat $CA$ en el punt $Q$ tal que la longitud del segment $PQ$ sigui igual a la suma de les longituds dels segments de les perpendiculars tirades a $BC$ per $P$ i $Q$.

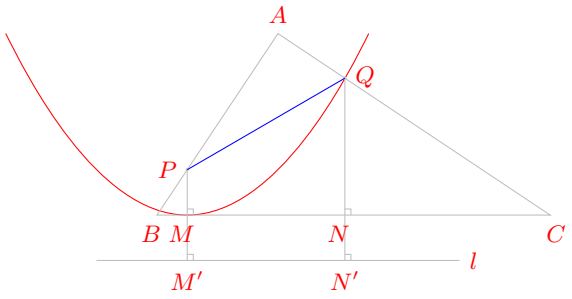
**Solució:** (Solució del proponent.)

Considerem el problema resolt. Sigui $M$ el punt de $BC$ tal que $PM \perp BC$ i sigui $M'$ el punt simètric de $P$ respecte de $M$.

Tracem per $M'$ la recta $l$ paral·lela a $BC$. Sigui $N$ el peu de la perpendicular tirada a $BC$ per $Q$ i $\{N'\} = QN \cap l$. Llavors, $PM'$ és paral·lel a $PN'$. Es té aleshores que la distància de $Q$ a $P$ és igual a la distància de $Q$ a $l$:

$$\begin{aligned} d(Q,P) &= PQ \\ &= PM + QN \\ &= MM' + QN \\ &= NN' + QN \\ &= QN' \\ &= d(Q,l). \end{aligned}$$

Així doncs, el lloc geomètric del punt $Q$ és la paràbola de focus $P$ i directriu la recta $l$. La intersecció d'aquesta paràbola i el costat $CA$ resol el problema.




**A162.** (Proposat per Oscar Rivero Salgado, UPC, Barcelona.)

(a) Proveu que existeixen infinits nombres enters positius que no es poden representar de la forma $a^2 + b^3$, on $a$ i $b$ són també enters positius.

(b) Sigui $n$ un nombre enter i $p$ un primer. Proveu que sempre existeixen enters positius $a$ i $b$ de manera que $a^2 + b^3 - n$ és múltiple de $p$.

**Solució:** (Solució del proponent.)

(a) Sigui $N$ un enter positiu. Es trobarà una fita per al nombre d'enters més petits o iguals que $N^6$ que es poden escriure com $a^2 + b^3$. Com que tant $a^2$ com $b^3$ són enters positius, se satisfà que $a < N^3$ i $b < N^2$. Per tant, el nombre d'enters que es poden representar d'aquesta manera serà com a màxim $N^2 \cdot N^3 = N^5 < N^6$. Com que $N$ es pot prendre arbitràriament gran, també tindrem que hi haurà un nombre arbitràriament gran d'enters positius que no es poden escriure de la manera que es demana.

(b) Sigui $r \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ el conjunt de classes de residus mòdul $p$, i sigui

$$S_r = \{(a,b) \in [0, p-1]^2 : a^2 + b^3 \equiv r\ (p)\}.$$

D'aquí en endavant usarem tota l'estona l'aritmètica mòdul $p$. Escrivim $s_r = |S_r|$ i es veurà que $s_r > 0$ per a qualsevol $r$, la qual cosa estableix el resultat desitjat. Per veure això, provarem primer el següent lema auxiliar:

*Sigui $N$ el nombre de quaternes $(a, b, c, d) \in [0, p-1]^4$ per a les quals $a^2 + b^3 \equiv c^2 + d^3$ mòdul $p$. Aleshores, se satisfà que*

$$N = \sum_{r \in [0, p-1]} s_r^2 \leq p(p^2 + 2p - 2).$$

La primera igualtat és gairebé immediata. Per a cada classe $r$, existeixen $s_r$ parelles $(a,b)$ amb $a^2+b^3 \equiv r$, i $s_r$ parelles amb $c^2+d^3 \equiv r$. Per tant, existeixen $s_r^2$ quaternes. La desigualtat, però, és més subtil. Fixem primer un parell $(b,d) \in [0,p-1]^2$ i determinem quantes parelles $(a,c)$ satisfan la congruència demanada. Suposi's en primer lloc que $b^3 \equiv d^3$. Aleshores, el valor de $b$ es pot triar de $p$ maneres diferents; si $b \equiv 0$, llavors $d \equiv 0$; i en la resta de casos n'hi ha com a molt 3, de valors possibles per a $d$. Si $k$ és el nombre de vegades que passa aquest cas, tenim doncs que $k \leq 3p-2$. A més, l'equació

$$a^2 - c^2 \equiv (a-c)(a+c) \equiv 0$$

admet $2p-1$ solucions diferents mòdul $p$. En canvi, si $b^3$ no és congruent amb $d^3$, fent servir l'equació

$$(a-c)(a+c) = d^3 - b^3,$$

es té que el valor de $a-c$ determina automàticament el de $a+c$ (i per tant, quan $p>2$, els valors de totes dues variables). D'aquí se'n conclou que

$$\begin{aligned} N &\leq k(2p-1) + (p^2-k)(p-1) \\ &= p^2(p-1) + kp \\ &\leq p^2(p-1) + p(3p-2) \\ &= p(p^2+2p-2). \end{aligned}$$

Noti's que hem establert una fita inferior per al valor de $N$. Ara podem provar la propietat demanada trobant una fita superior que ens porti a una contradicció. Suposi's que $s_r = 0$ per a algun $r$, i denoti's per $T$ el conjunt de les potències sisenes no zero mòdul $p$. Com que cada residu és una potència sisena per a com a molt 6 valors, tenim que $|T| \geq (p-1)/6 \geq 2$ si $p \geq 13$. Es té a més que si $t \in T$, llavors $s_{tr} = 0$; si no fos així i $x^2+y^3 \equiv tr$, amb $t \equiv u^6$ per a algun $u$,

$$(u^{-3}x)^2 + (u^{-2}y)^3 \equiv t^{-1}(x^2+y^3) \equiv r.$$

Per tant, almenys dos dels nombres $s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}$ són zero. Si ara fem servir la desigualtat entre les mitjanes aritmètica i quadràtica aplicada als $p-2$ nombres del conjunt $s_0, s_1, \ldots, s_{p-1}$ que sabem que són no zero, veiem que

$$\begin{aligned} N &= \textstyle\sum_{r\in[0,p-1]} s_r^2 \\ &\geq \tfrac{1}{p-2}\Big(\textstyle\sum_{r\in[0,p-1]} s_r\Big)^2 = \tfrac{p^4}{p-2} \\ &> p(p^2+2p-2), \end{aligned}$$

la qual cosa no pot passar pel resultat vist abans. Observi's que la desigualtat $p^4 > p(p-2)(p^2+2p-2)$ es comprova de manera immediata operant amb els polinomis corresponents.

Ara bé, encara cal comprovar els primers petits $p<13$. Si $p=3$ o $p=3k+2$ aleshores el resultat és immediat perquè $b^3$ pren tots els residus mòdul $p$. En canvi, pel primer $p=7$ hem de fer la comprovació *manualment* i de seguida veiem que es prenen tots els residus possibles. A més, el cas $p=2$ també s'ha de comprovar, perquè havia estat exclòs.

*Comentari del proponent.* El segon apartat d'aquest problema està basat en un altre de la llista curta sobre la qual es va elaborar la prova de l'Olimpíada Internacional de Matemàtiques el 2012 (aquí, però, hem proposat una versió una mica més senzilla i fàcil d'estudiar per altres mètodes). El problema original, que es considerava de *màxima dificultat*, de ben segur va estar descartat perquè se simplificava molt amb el coneixement de resultats avançats sobre l'aritmètica de corbes algebraiques, que de ben segur ignorarien la major part dels concursants.

**A163.** (Proposat per José-Luis Díaz Barrero, UPC, Barcelona.)

Siguin $a,b,c$ les longituds dels costats d'un triangle $\triangle ABC$ amb àrea $S$, circumradi $R$ i semiperímetre $p$. Demostreu que

$$\frac{(p-a)^4}{c(p-b)} + \frac{(p-b)^4}{a(p-c)} + \frac{(p-c)^4}{b(p-a)} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{RS}{2}\right)^{2/3}.$$

**Solució:** (Solució del proponent.)

Insertant el terme $\frac{ab+bc+ca}{8}$, afirmem que es compleix la desigualtat següent:

$$\tfrac{(p-a)^4}{c(p-b)} + \tfrac{(p-b)^4}{a(p-c)} + \tfrac{(p-c)^4}{b(p-a)} \geq \tfrac{ab+bc+ca}{8} \geq \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{RS}{2}\right)^{2/3}.$$

En efecte, denotant per $p=(a+b+c)/2$, el terme de l'esquerra pot escriure's, en terme de les longituds dels costats, com

$$\tfrac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)} + \tfrac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)} + \tfrac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)} \geq ab+bc+ca.$$

Per provar l'anterior, usem la desigualtat de Radon-Bergström, que afirma que

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\geq\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}.$$

Per tant, usant l'anterior i tenint en consideració que $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, tindrem que

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{(a-b+c)^4}{a(a+b-c)}&\geq\frac{\left[(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2\right]^2}{a(a+b-c)+b(b+c-a)+c(c+a-b)}\\&=\frac{\left[3(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)\right]^2}{a^2+b^2+c^2}\\&\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2}\\&\geq ab+bc+ca,\end{aligned}$$

on $\sum_{cyc}$ denota que la suma es cíclica sobre $a,b$ i $c$. L'igualtat es dona si $a=b=c$. Dit d'una altra manera, quan $\triangle ABC$ és equilàter. Finalment, usant la desigualtat aritmètico-geomètrica, tenim que

$$\begin{aligned}\frac{ab+bc+ca}{8}&\geq\frac{3}{8}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\\&=\frac{3}{8}\sqrt[3]{(4RS)^2}=\frac{3}{2}\left(\frac{RS}{2}\right)^{2/3},\end{aligned}$$

on hem usat la igualtat $abc=4RS$, ben coneguda. De nou, la igualtat es dona quan $a=b=c$, i per tant ja hem acabat.

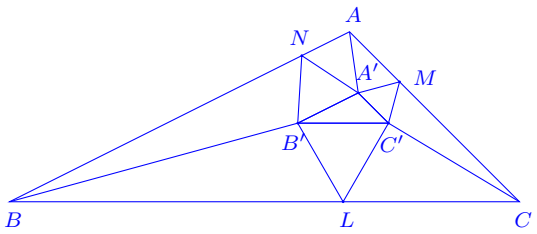
**A164.** (Proposat per Joaquim Nadal Vidal. Llagostera, Girona.)

A l'interior d'un triangle $\triangle ABC$ dibuixem un triangle $\triangle A'B'C'$ amb els costats paral·lels als del triangle inicial (i, per tant, semblants) de manera que existeixin punts $L$, $M$, $N$ situats sobre $AB$, $BC$ i $CA$ respectivament tals que els triangles $\triangle A'B'L$ , $\triangle B'C'M$ i $\triangle C'A'N$ són equilàters. Trobeu el màxim valor de la raó de semblança $k$ entre $\triangle A'B'C'$ i $\triangle ABC$.

**Solució:** (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Denotem per $a=BC$, $b=CA$ i $c=AB$ les longituds dels costats del triangle $\triangle ABC$. Aleshores, $ka=B'C'$, $kb=C'A'$ i $kc=A'B'$ són les longituds dels costats del triangle $\triangle A'B'C'$.

A més, $[A'B'C']=k^2\,[ABC]$, on d'ara endavant usarem la notació $[UV\ldots Z]$ per indicar l'àrea del polígon $UV\ldots Z$.




Observem que

$$\begin{aligned}[ABC]=[A'B'C']&+[ABB'A']\\&+[BCC'B']+[CAA'C'],\end{aligned}\quad(1)$$

on, per construcció de $\triangle A'B'C'$, els quadrilàters $ABB'A'$, $BCC'B'$ i $CAA'C'$ són trapezis.

Atès que $B'C'$ és paral·lel a $BC$, la longitud de l'altura del trapezi $BCC'B'$ és la mateixa que la del triangle equilàter $\triangle B'C'L$. O sigui, $\frac{ka\sqrt{3}}{2}$. D'això se segueix que

$$\begin{aligned}[BCC'B']&=\frac{1}{2}\left(BC+B'C'\right)\cdot\frac{ka\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{1}{2}\left(a+ka\right)\frac{ka\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}k\left(k+1\right)a^2.\end{aligned}$$

Argumentant de manera similar al cas anterior tenim

$$\begin{aligned}[ABB'A']&=\frac{\sqrt{3}}{4}k\left(k+1\right)c^2,\\[CAA'C']&=\frac{\sqrt{3}}{4}k\left(k+1\right)b^2.\end{aligned}$$

Substituint aquestes expressions a (1), obtenim la igualtat següent, equivalent:

$$[ABC]=k^2\,[ABC]+\frac{\sqrt{3}}{4}k\left(k+1\right)\left(a^2+b^2+c^2\right),$$

d'on deduïm que

$$[ABC]\geq k^2\,[ABC]+3k\left(k+1\right)[ABC],\quad(2)$$

atès que

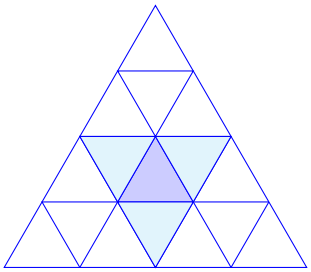
$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}\,[ABC]\qquad(3)$$

(d'aquesta coneguda desigualtat, dita de Weitzenböck, se'n poden trobar onze demostracions en el llibre d'Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer (1998).)

La desigualtat (2), dividida per $[ABC]$, esdevé

$$4k^2 + 3k - 1 \leq 0,$$

que té les solucions $-1 \leq k \leq \frac{1}{4}$. Podem, doncs, concloure que el màxim valor volgut de $k$ és $\frac{1}{4}$ i s'assoleix quan s'ateny la igualtat a (3), si i només si el triangle $\triangle ABC$ és equilàter (vegeu la figura següent):



# Matemots

Xavier Gràcia
Universitat Politècnica de Catalunya

Recordeu que es tracta d'un joc de llengua (vegeu l'article introductori al núm. 33 de la *SCM/Notícies*). Cal resoldre els enigmes lingüístics següents, a partir de la definició donada i les pistes incloses.

Vam dedicar els dos números anteriors als nombres. Un dels enigmes, per exemple, demanava trobar el nombre (no natural) amagat dins la definició "Quantitat de medicament que s'ha d'administrar". Naturalment, es tracta del nombre complex 2i.

En aquesta ocasió us proposem una nova llista d'enigmes de contingut matemàtic, com sempre, però vinculats als temps estranys que estem vivint. Endevineu de què parlem?

En cas de dubte podeu trobar-ne les respostes al peu de pàgina.[27]

1. Tipus de creixement popularitzat per Malthus i per les pandèmies (11 lletres)
2. Pot ser real, funcional o de sang (7 lletres)
3. Guarint-te mentre comptes els dies d'aïllament (8 lletres i guionet)
4. Poden ser d'intersecció, crítics i també de sutura (5 lletres)
5. Òbit matemàtic (8)
6. Pot ser de primalitat, d'hipòtesi i fins i tot PCR (menys de 5)
7. És un primer moment i també el temps de tota una de vida (9)
8. Pot ser canònica, d'optimisme o de penicillina (8)

[27] Respostes als Matemots: 5. definició; 7. esperança; 2. anàlisi; 3. curant-te; 1. exponencial; 8. injecció; 6. test; 4. punts. (S'han de desordenar i invertir.)